FONCTIONS RÉELLES : Étude locale

Deux semaines

Table des matières

ECUE concerné **2**

Motivation **2**

Attendus **2**

1 Les comparaisons de Landau **3**
1.1 Résumé . . . 3
1.2 Exercices . . . 4
Exercice 1.1 . . . 4
Exercice 1.2 . . . 4
Exercice 1.3 . . . 4
Exercice 1.4 . . . 4
Exercice 1.5 . . . 4
Exercice 1.6 . . . 5
Exercice 1.7 . . . 5
Exercice 1.8 . . . 5
Exercice 1.9 . . . 5

2 Développements limités **6**
2.1 Résumé . . . 6
2.2 MiMos à travailler . . . 6
2.3 Exercices . . . 6
Exercice 2.10 . . . 6
Exercice 2.11 . . . 6
★ Exercice 2.12 . . . 7
Exercice 2.13 . . . 7

ECUE concerné

Cette feuille de TD est un des trois chapitres de l'ECUE FCT. Elle fait partie du B3.

Les **prérequis** sont :

— Dériver les fonctions usuelles et leurs compositions.
— Comparer deux suites (comparateurs de Landau), ECUE SR B2.

Motivation

Quand un programme effectue un calcul numérique, il fait souvent appel à des fonctions réelles. Ces dernières peuvent résulter d'un code complexe et, parfois, on comprend mieux la fonction quand on en a une approximation.

En effet, les fonctions réelles à valeurs réelles ont une caractéristique qui les distingue des autres fonctions étudiées au séminaire : leurs ensembles de départ et d'arrivée sont $\mathbb{R}$ ou, du moins, des intervalles de $\mathbb{R}$. C'est-à-dire que ce sont des ensembles dans lesquels il est possible de définir des expressions comme «x tend vers x_0» (x_0 étant une valeur fixée dans $\mathbb{R}$), ou encore «$f(x)$ tend vers une valeur y_0 quand x tend vers x_0». De façon plus générale, on peut étudier le comportement d'une fonction au «voisinage» d'une valeur x_0.

Une situation similaire a été vue au S1, quand vous avez étudié les suites numériques. Une suite est en fait une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Ici, la variable n ne peut pas tendre vers une valeur $n_0 \in \mathbb{N}$, en revanche elle peut tendre vers $+\infty$. De plus, la suite (u_n) peut avoir une limite au voisinage de $+\infty$, car son ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$. C'est ainsi que vous avez étudié le comportement de certaines suites : y a-t-il convergence ? Si non, peut-on dire que la suite a une limite infinie ? On a aussi vu comment on pouvait comparer deux suites au moyen des comparaisons de Landau : $u_n = o(v_n)$, $O(v_n)$ ou encore $u_n \sim v_n$.

De façon générale, étudier le comportement d'une fonction f quand x tend vers une valeur $x_0 \in \mathbb{R}$, ou d'une suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$, amène à en trouver une approximation simple. Le premier exemple qui vient à l'esprit est quand il y a une limite $\ell \in \mathbb{R}$: une approximation de $f(x)$ au voisinage de x_0 pourra être cette valeur constante ℓ. Mais d'une part ce n'est pas toujours possible, si f n'a pas de limite réelle, d'autre part quand c'est possible, ce n'est pas toujours suffisant : qui dit approximation dit erreur d'approximation, et on peut souhaiter obtenir une approximation plus précise, d'erreur plus faible.

Les approximations que nous utiliserons seront des développements limités. L'objet de ce chapitre est de se familiariser avec ces derniers. Le terme «approximation» est à considérer au sens large : c'est ***à la fois*** la formule simplifiée approximante (en général un polynôme), ***et*** l'erreur d'approximation. On verra comment obtenir des développements limités et on s'entrainera à les manipuler.

Attendus

À la fin de ce chapitre, vous devez être capables de :

— Établir et manipuler des relations de comparaisons entre deux fonctions, au voisinage d'un point ou de l'∞ (comparateurs de Landau).
— Déterminer des développements limités à partir de développements limités usuels, par exemple, pour trouver des limites.

En particulier, vous devez être capables de :

— Comparer deux fonctions au voisinage d'un point ou de l'infini.
— Additionner, multiplier et diviser des relations de comparaisons entre fonctions.
— Connaitre **par cœur** les développements limités usuels en 0.
— Déterminer le développement limité d'une fonction à partir des développements limités usuels appris.

— Additionner, multiplier et composer des développements limités.
— Savoir à quel ordre développer une fonction pour atteindre un objectif donné.
— Ne jamais perdre de vue l'erreur d'approximation et savoir l'évaluer.

Attention : l'oubli d'un reste (petit o) dans un DL sera fortement sanctionné à l'écrit tout comme l'emploi du symbole = au lieu du symbole $\sim$ (ou l'inverse).

1 Les comparaisons de Landau

1.1 Résumé

Ces comparaisons sont apparues lors de l'étude des suites réelles, où vous vous êtes entrainés à comparer deux suites (u_n) et (v_n) quand n tend vers $+\infty$. Nous avions alors vu que :

1. $u_n = o(v_n)$ s'il existe une suite (ε_n) tendant vers 0 telle que $u_n = v_n\varepsilon_n$.
   Si la suite (v_n) ne s'annule pas, alors $(\varepsilon_n) = \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ donc : $\quad u_n = o(v_n) \iff \dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
2. $u_n = O(v_n)$ s'il existe une suite (b_n) bornée telle que $u_n = v_n b_n$.
   Si la suite (v_n) ne s'annule pas, alors $(b_n) = \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ donc : $\quad u_n = O(v_n) \iff \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée.
3. $u_n \sim v_n$ s'il existe une suite (ε_n) tendant vers 0 telle que $u_n = v_n(1+\varepsilon_n)$.
   Si la suite (v_n) ne s'annule pas, alors $(\varepsilon_n) = \left(\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right)$ donc : $\quad u_n \sim v_n \iff \dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Ces définitions s'étendent de façon naturelle à la comparaison de deux fonctions f et g quand la variable x tend vers une valeur $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Définition à connaitre par cœur :
On dit que, au voisinage de x_0 :

1. Négligeabilité : $f(x) = o\big(g(x)\big)$ s'il existe une fonction ε tendant vers 0 quand x tend vers x_0 telle que $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$.
   Si la fonction g ne s'annule pas, alors $\varepsilon = \dfrac{f}{g}$ donc :
   $$f(x) = o\big(g(x)\big) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$$
2. Domination : $f(x) = O\big(g(x)\big)$ s'il existe une fonction b bornée telle que $f(x) = g(x)b(x)$.
   Si la fonction g ne s'annule pas, alors $b = \dfrac{f}{g}$ donc :
   $$f(x) = O\big(g(x)\big) \iff \frac{f}{g} \text{ est bornée}$$
3. Équivalence : $f(x) \sim g(x)$ s'il existe une fonction ε tendant vers 0 quand x tend vers x_0 telle que $f(x) = g(x)\big(1+\varepsilon(x)\big)$.
   Si la fonction g ne s'annule pas, alors $\varepsilon = \dfrac{f}{g} - 1$ donc :
   $$f(x) \sim g(x) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} 1$$

Dans cette section, nous étudions le comportement de ces comparaisons vis-à-vis des opérations usuelles avec les réelles : addition/soustraction, multiplication/division, composition par une fonction réelle.

1.2 Exercices

Exercice 1.1

Soient trois fonctions f, g et h telles que, au voisinage de $x_0 = 0$,

$$f(x) = o(0), \qquad g(x) = O(0) \qquad \text{et} \qquad h(x) \sim 0$$

Que peut-on dire de ces trois fonctions ?

Exercice 1.2

Soient une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On s'intéresse au comportement de f au voisinage de x_0.

La proposition (P) suivante est-elle vraie ?

$$(P) : \qquad f(x) \sim \ell \iff f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$$

Exercice 1.3

1. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. À quelle condition sur α et β a-t-on
   (a) $x^\alpha = o\left(x^\beta\right)$ quand x tend vers $+\infty$?
   (b) $x^\alpha = o\left(x^\beta\right)$ quand x tend vers 0 ?
2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - x^2 - 4x^3$.
   (a) Donner un équivalent simple de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.
   (b) Donner un équivalent simple de $f(x)$ au voisinage de 0.

Exercice 1.4

Comparer aux voisinages de 0 et de $+\infty$:

1. $\ln(x)$ et x
2. e^x et x
3. $2x^3 - x^2 - x$ et $x^2 + 1$

Exercice 1.5

Donner des équivalents simples de :

1. $2x^8 - 3x^7 + 10$ aux voisinages de 0 et de $+\infty$
2. $2x^8 - 3x^7$ aux voisinages de 0 et de $+\infty$
3. $\sin(x)$ au voisinage de 0. Indice : chercher $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$.
4. e^x au voisinage de 0.
5. $e^x - 1$ au voisinage de 0. Indice : chercher $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.

Exercice 1.6

Soient deux fonctions f et g telles que, au voisinage de 0,

$$f(x) = o(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = o\left(x^2\right)$$

1. Trouver les comparaisons possibles, quand il y en a, entre :
   (a) $2f(x)$ et x
   (b) $f(x)$ et $2x$
   (c) $f(x)$ et $g(x)$
2. Pour chacune des fonction suivantes, existe-t-il $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que la fonction soit $o(x^\alpha)$? Si oui, donner α.
   (a) $f + g$
   (b) $f - g$
   (c) fg
   (d) $\dfrac{f}{g}$ (en supposant que g ne s'annule pas)
   (e) xf
   (f) $\dfrac{g}{x}$

Exercice 1.7

Soient quatre fonctions f, g, h et k définies sur $\mathbb{R}$ telles que, au voisinage d'un $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$,

$$\begin{cases} f & \sim & g \\ h & \sim & k \end{cases}$$

Lesquelles des propriétés ci-dessous peut-on déduire ? Justifier vos réponses.

1. $f + h \sim g + k$
2. $fh \sim gk$
3. $\frac{f}{h} \sim \frac{g}{k}$ (en supposant que les fonctions h et k ne s'annulent pas)
4. $|f| \sim |g|$
5. pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $f^\alpha \sim g^\alpha$
6. $e^f \sim e^g$
7. $\ln(f) \sim \ln(g)$ (en supposant que les fonction f et g sont strictement positives)

Exercice 1.8

Trouver des équivalents simples des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{2x^3 - x + 6}{1 - x}$ au voisinage de 0, puis au voisinage de $+\infty$
2. $\sin(x) \times (e^x - 1) \times (3x^2 + 2x)$ au voisinage de 0
3. $\sin(x) + x^2$ au voisinage de 0, puis au voisinage de $+\infty$

Exercice 1.9

1. Soit une fonction f telle que, au voisinage de 0, $f(x) = 2x - \dfrac{x^3}{2} + o\left(x^3\right)$.
   Peut-on en déduire des équivalents simples des fonctions suivantes ?
   (a) $f(x)$
   (b) $f(x) - 2x$
   (c) $f(x) - 2x + \dfrac{x^3}{2}$
2. On suppose maintenant que $f(x) = 2x - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^4}{8} + o\left(x^4\right)$.
   (a) Est-ce que cette nouvelle hypothèse contredit l'hypothèse de la partie 1 ?
   (b) Répondre aux questions de la partie 1 à partir de cette nouvelle hypothèse.

2 Développements limités

2.1 Résumé

Quand une fonction réelle f est suffisamment régulière, il est possible d'obtenir une approximation polynomiale au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$. Plus précisément, le théorème de Taylor-Young énonce que, si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si x_0 est un point donné dans I, alors au voisinage de x_0,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0}{n!}(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right)$$

Cette formule permet d'obtenir des approximations gigognes, chacune d'entre elle étant un peu plus précise que la précédente :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + o(1) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right) \\ &\vdots \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0}{n!}(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right) \end{aligned}$$

Dans la pratique, on utilise ce théorème pour obtenir les développements limités des fonctions de base. Les fonctions plus complexes sont en générale obtenue en combinant les fonctions de base. On effectue alors les mêmes opérations sur leurs développements limités.

Cette section est consacrée à ces opérations : addition, multiplication et composition de développements limités. On peut ensuite utiliser les résultats obtenus pour, par exemple, lever des formes indéterminées dans des calculs de limites.

2.2 MiMos à travailler

Formules de Taylor
Développement limité au voisinage d'un point
Opérations sur les développements limiés

2.3 Exercices

Exercice 2.10

Rappeler les développements limités au voisinage de 0 à l'ordre 4 des fonctions suivantes :

1. $f(x) = e^x$.
2. $g(x) = \ln(1 + x)$.
3. $h(x) = (1 + x)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
4. $i(x) = \sin(x)$.
5. $j(x) = \cos(x)$.

Exercice 2.11

Déterminer, au voisinage de 0, les développements limités des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x} - e^x$ à l'ordre 3.

2. $g(x) = e^x \cos(x)$ à l'ordre 4.
3. $h(x) = \sin(3x)\ln(1-x)$ à l'ordre 3.
4. $i(x) = e^{\sin(x)}$ à l'ordre 4.
5. $j(x) = e^{\cos(x)}$ à l'ordre 3.
6. $k(x) = \sqrt{1+2x}$ à l'ordre 4.
7. $l(x) = \ln(2+x)$ à l'ordre 3.
8. $m(x) = \ln(1+e^x)$ à l'ordre 2.
9. $n(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 2.
10. $o(x) = \Big(\cos(x)\Big)^{\sin(x)}$ à l'ordre 4.

★ **Exercice 2.12**

Même question pour :

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$ à l'ordre 3, $g(x) = \ln(1+\cos(x)+\sin(x))$ à l'ordre 3, $h(x) = \tan(x)$ à l'ordre 5.

Exercice 2.13

Étudier l'existence des limites suivantes. Si elles existent, donner leurs valeurs.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \cos(x) - x}{x - \ln(1+x)}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \cos(x)}{x^2}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2(x) - x\ln(1+x)}{e^x + \cos(x) - \sin(x) - 2}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$.
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x$ où $a \in \mathbb{R}$.
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$.
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - x^2$.
9. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n}{n-42}\right)^n$.